Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème 1

(*adapté de Centrale TSI 2023*)

Notations

- On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs complexes.

  On admet que $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}\right)$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie I — Généralités

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

   On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
3. Démontrer que l'application
$$\mathcal{L} : \left|\begin{array}{ll} E & \to \mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}\right) \\ f & \mapsto F \end{array}\right.$$
   est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f

Partie II — Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

4. Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.
   On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$
   (b) Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.
   (d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,
$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$
5. Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t + \mathrm{i} b t}$.
   (a) Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.
   (b) En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at}\cos(bt)$ et $h_{\alpha,b} : t \mapsto e^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.
6. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.
7. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ appartenant pas à E.

Partie III — Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée secondes

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

8. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$
9. On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, que $f'' \in E$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.
   Démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

Partie IV — Injectivité de la transformation de Laplace

On se propose dans cette partie de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E, c'est-à-dire que
$$\forall (y_1, y_2) \in E^2, \quad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

10. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.
11. Montrer que g est une fonction bornée.
12. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \text{si } u = 0. \end{cases}$

13. Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.
14. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$, démontrer que
$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(u)u^n \,\mathrm{d}u = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $\left(\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

16. Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right) = 0$$

17. En déduire que $f = 0$.
18. Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

Partie V — Applications aux équations différentielles

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

19. *Résolution classique*

    (a) Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'equation $y''(t)+2y'(t)+2y(t) = t+1$ de la forme $y(t) = at+b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

    (b) Résoudre alors le problème $(\mathcal{P})$.

20. *Résolution utilisant la transformation de Laplace*

    On suppose que y est une solution du problème $(\mathcal{P})$ vérifiant de plus les hypothèses de la question 8.

    (a) Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $\left(p^2 + 2p + 2\right) \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{1 + p + p^2}{p^2}$.

    (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que

    $$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1 + p + p^2}{p^2\,(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p + 1)^2 + 1}.$$

    (c) En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$

    (d) Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème $(\mathcal{P})$.

Problème 2
(adapté de ENS BL 2000)

Dans ce problème, on s'intéresse aux endomorphismes d'un espace vectoriel laissant invariants tous les vecteurs d'un hyperplan donné.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension d avec $d \geqslant 2$. On considère un hyperplan H de E et φ un endomorphisme de E tel que

$$\forall h \in H, \qquad \varphi(h) = h$$

i.e. laissant invariant tout élément de H.

Partie — Préliminaires

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$
2. Montrer qu'il existe un unique réel γ et un unique $h_a \in H$ tels que
$$\varphi(a) = \gamma a + h_a.$$
3. Montrer que le réel γ ne dépend pas du choix de $a \notin H$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

4. Montrer qu'il existe un vecteur u non-nul tel que $\varphi(u) = \gamma u$.
Indication : On pourra calculer $\varphi\left(a + \dfrac{1}{\gamma - 1} h_a\right)$.
On note alors $E_\gamma = \mathrm{Vect}(u)$.
5. (a) Montrer que $E_\gamma = \mathrm{Ker}(\varphi - \gamma \mathrm{Id})$
(b) Montrer que $E = H \oplus E_\gamma$.
(c) Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = H \oplus E_\gamma$, donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. Montrer que les seules droites vectorielles D (i.e. les seuls sous-espaces vectoriels de E de dimension 1) telles que $\varphi(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.
Soit V un sous-espace vectoriel de E.
7. Montrer que si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $\varphi(V) \subset V$.
8. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$.
(a) Soit $F = E_\gamma + D$. Vérifier que $\varphi(F) \subset F$.
(b) Montrer que $\varphi(V) \not\subset V$.
9. Déduire des questions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(V) \subset V$.

Partie II

On suppose dans cette partie que $\gamma = 1$ et que φ n'est pas l'application identité de E.

10. (a) Montrer que $\mathrm{Rang}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = 1$.
(b) Soit c une base de $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un réel $f(x)$ tel que $\varphi(x) = x + f(x)c$.
(c) Montrer que f est linéaire et que $H = \mathrm{Ker}(f)$
11. Montrer que φ est bijective et déterminer son inverse.
12. En choisissant une base adéquate de E, donner une forme matricielle la plus simple possible de $\mathrm{Mat}(\varphi)$.
13. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un sous-espace V de E pour que $\varphi(V) \subset V$.